МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до розділу «Критерії міцності та пластичності»
кредитного модуля 1 дисципліни “Опір матеріалів” для самостійної
роботи студентів спеціальності "Галузеве машинобудування"

Київ – 2017

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ім. ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до розділу «Критерії міцності та пластичності»
кредитного модуля 1 дисципліни “Опір матеріалів” для самостійної роботи студентів спеціальності "Галузеве машинобудування"

Затверджено на засіданні вченої ради
Механіко-машинобудівного інституту
НТУУ КПІ ім. Ігоря Сікорського
Протокол № 7 від 27 лютого 2017 р.

Київ – 2017

Методичні вказівки до розділу «Критерії міцності та пластичності» кредитного модуля 1 дисципліни “Опір матеріалів” для самостійної роботи студентів спеціальності "Галузеве машинобудування" / Уклад.: Шукаєв С.М. – К.: Електронне видання, 2017. – 32с.

Затверджено Методичною радою Механіко-машинобудівного інституту НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»,
протокол № 7 від 27 лютого 2017 р.

Укладач: Шукаєв С.М., доктор техн. наук, проф.

Рецензент: Рудаков К.М., доктор техн. наук, проф.

Відповідальний редактор: Бабєнко А. Є., доктор техн. наук, проф.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методичні вказівки містять теоретичні відомості, приклади розв'язування задач, задачі для самостійного розв'язання та питання для самоперевірки знань з розділу «Критерії міцності та пластичності» кредитного модуля 1 навчальної дисципліни «Опір матеріалів». Методичні вказівки будуть корисними для студентів всіх форм навчання.

Однією з найважливіших задач опору матеріалів та інженерних розрахунків в цілому є оцінка міцності конструкцій та їх елементів за відомими параметрами напруженого стану. Для розв'язання цієї задачі застосовується концепція еквівалентних напружень, коли складний напружений стан замінюється на еквівалентний простий (для обох випадків коефіцієнт запасу є однаковим). При цьому вводяться гіпотези про переважний вплив на міцність матеріалу того чи іншого чинника із формулюванням відповідних теорій міцності та критеріїв граничного стану.

Досвід показує, що під час самостійного виконання домашніх контрольних завдань і розрахункових робіт у студентів виникають труднощі принципового характеру, пов'язані із вибором критерію міцності. Тому дані методичні вказівки містять приклади розв'язання задач за розділом і набір задач для самостійного розв'язання.

Для кращого засвоєння представленого матеріалу у методичних вказівках наводяться також питання для самоперевірки знань і перелік рекомендованої літератури.

І. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Призначення критеріїв міцності

Оцінка міцності деталей машин та елементів конструкцій за відомим напруженим станом є однією з найважливіших інженерних задач. В умовах простого (лінійного) напруженого стану задача розв'язується легко через порівняння максимального за абсолютною величиною напруження з допустимим.

За складного напруженого стану (плоского або об'ємного) немає однозначної відповіді на питання, яке напруження необхідно обрати за граничне для перевірки умови міцності. Експерименти свідчать, що досягнення граничного стану (виникнення пластичних деформацій, поява тріщин, повне руйнування і т.ін.) в одному і тому самому матеріалі може відбуватися за різних значень головних напружень в залежності від співвідношення між ними. Крім того, встановлено, що напружений стан впливає на механічні характеристики матеріалу.

За цих умов найбільш точним методом визначення граничного стану є проведення натурного експерименту. Для інженерних розрахунків, у більшості випадках, цей підхід є неприйнятним через високу вартість, та складність реалізації. Тому, інженери використовують стандартні випробування лабораторних зразків матеріалу і роблять на їх основі узагальнення, шляхом заміни складного напруженого стану еквівалентним йому лінійним. Для цього використовують так звані механічні теорії міцності, згідно з якими припускається переважний вплив певних чинників на граничний стан матеріалу, і розраховуються відповідні еквівалентні напруження. За довільного напруженого стану тіла граничний стан досягається після набуття еквівалентним напруженням допустимого значення, що визначається з випробувань на одновісне розтягання.

Слід відзначити, що граничний стан для крихких матеріалів оцінюється за границею міцності, а для пластичних – за границею текучості. Поділ матеріалів на крихкі і пластичні достатньо умовний, так як один і той же матеріал при одній комбінації напружень може знаходитись у крихкому стані, а за іншої – у пластичному.

Умова міцності за складного напруженого стану записується наступним чином:

$$\sigma_{\text{екв}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Вибір визначальних для руйнування чинників називають теорією міцності, а математичний запис умови досягнення згаданими чинниками критичного значення - критерієм (умовою) міцності.

Застосування критерію міцності дозволяє замінити складний напружений стан еквівалентним (однаково небезпечним з точки зору досягнення граничного стану) простим одновісним розтяганням.

Поняття про граничну поверхню міцності

Проблема раціонального вибору критерію міцності зводиться до визначення деякої функції компонент тензора напружень виду

$$K = f\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i\right),$$

де m_i — константи матеріалу, які визначаються з найпростіших випробувань.

Дана функція в координатах $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ може бути представлена поверхнею, яка обмежує область безпечних напружень. Цю поверхню називають граничною.

Гранична поверхня руйнування є геометричним місцем точок, координати яких дорівнюють границям міцності, а точки, які лежать на граничній поверхні текучості, відповідають границям текучості матеріалу за різних напружених станів. На рис. 1 граничні напруження позначені $\sigma_1^{нб}$, $\sigma_2^{нб}$, $\sigma_3^{нб}$.

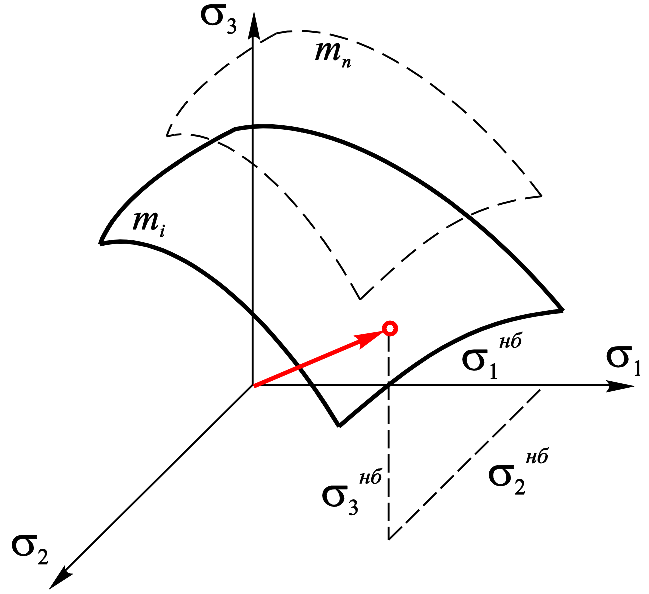


Рис. 1. Гранична поверхня руйнування (текучості)

В умовах плоского напруженого стану поверхня вироджується у плоску криву, яка в даному випадку називатиметься *кривою руйнування* або *кривою текучості*.

За різних критеріїв міцності граничні поверхні мають різний вигляд, зокрема, вони можуть бути регулярними (гладкими) або сингулярними (мають ребра та кутові точки). Однак, всі вони обов’язково повинні проходити через точки, що відповідають граничним константам матеріалу, які використовуються у відповідному критерії.

Критерії міцності і пластичності ізотропних матеріалів

Існує велика кількість критеріїв міцності. Найбільш розповсюдженими є чотири критерії міцності, які прийнято називати класичними, і які базуються на відповідних *класичних теоріях міцності*. Класичні критерії справедливі лише для ізотропних матеріалів, з однаковими границями міцності на розтягання та стискання.

Критерій найбільшого нормального напруження (перша теорія міцності)

Дана теорія міцності була запропонована у 1636 році видатним італійським вченим Галілео Галілеєм. Пізніше її використовували Лейбніц, Ляме, Клебш та Ренкін. Під іменем останнього теорія відома в англо-американській літературі, у вітчизняній її називають першою класичною теорією міцності.

Згідно з цією теорією руйнування матеріалу в умовах складного напруженого стану відбувається тоді, коли найбільше за абсолютною величиною головне напруження досягає граничного значення:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\mathrm{I}} = max\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\} \leq [\sigma_{\text{р}}].$$

Перевагою даної теорії є її простота, але на цьому все і завершується. Недоліком теорії є те, що вона не враховує вплив двох інших головних напружень. Так, ізотропний матеріал навіть за дуже великого рівномірного всебічного стискання не руйнується, в той час як за даним критерієм руйнування у тілі повинно настати з досягненням головними напруженнями величини границі міцності на одновісне розтягання $(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_{\text{м}}^{\text{р}})$.

Гранична поверхня, що відповідає першій теорії міцності, у просторі напружень має вигляд кубу, що утворюється шістьма площинами, паралельними координатним вісям. Початок координат знаходиться у центрі куба. В умовах плоского напруженого стану крива руйнування має вигляд квадрату, вісі симетрії якого проходять через початок координат і збігаються з координатними осями (рис. 2).

Увага! *Перша теорія міцності експериментально підтверджується лише для деяких дуже крихких, але достатньо однорідних матеріалів (камінь, цегла, кераміка, скло і т.ін.).*

Критерій найбільшої лінійної деформації (друга теорія міцності)

Недоліки першої теорії міцності спонукали до появи другої теорії міцності, запропонованої Едмом Маріоттом (1662 р.) і розвиненою Сен-Венаном.

Згідно з цією теорією руйнування матеріалу в умовах складного напруженого стану відбувається тоді, коли максимальна головна лінійна деформація ε_{max} досягає або перевищує допустиме значення $[\varepsilon]$, що відповідає максимальній лінійній деформації у моменту досягнення граничного стану за одновісного розтягання, тобто

$$|\varepsilon|_{max} \leq [\varepsilon].$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, напишемо умову міцності через напруження, а саме

$$\max\left\{\frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)); \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)); \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2))\right\} \leq [\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}.$$

Допустиму деформацію $[\varepsilon]$ також визначаємо згідно із законом Гука. Нехай найбільше відносне видовження буде дорівнювати ε_1, тоді

$$|\varepsilon|_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

В результаті отримаємо наступну умову міцності:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma_{\text{р}}].$$

Як бачимо, цей критерій, на відміну від попереднього, вже враховує всі головні напруження. Проте, дослідження засвідчили, що у багатьох випадках теорія не збігається з результатами експерименту. Крім того, застосування другої теорії міцності неприпустимо поза межами дії закону Гука.

У просторі напружень друга теорія міцності інтерпретується шістьма площинами, що пересікаються і утворюють поверхню у вигляді косокутного паралелепіпеда, який має вісь симетрії, рівнонахилену до координатних осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. В умовах плоского напруженого стану крива руйнування набуває вигляду ромба, вісі симетрії якого нахилені під кутом 45^0 до осей координат (рис. 2).

Увага! *Дослідна перевірка цієї теорії вказує на узгодження результатів лише для крихкого стану матеріалу (наприклад, для легованого чавуну та високоміцних сталей після низького відпуску). Цікаво відзначити, що в останній час цю теорію почали застосовувати до композиційних матеріалів, що працюють в умовах складного напруженого стану.*

Критерій найбільшого дотичного напруження (третя теорія міцності)

Вперше критерій найбільшого дотичного напруження було запропоновано Шарлем Кулоном в 1773 році. Пізніше Анрі Треска (1864 р.) запропонував використовувати його, як критерій пластичності. Він встановив, що при складному напруженому стані пластичні деформації виникають тоді, коли найбільше дотичне напруження досягає половини границі текучості при одноосьовому розтягуванні.

Згідно з цією теорією руйнування (або текучість) матеріалу в умовах складного напруженого стану відбувається тоді, коли найбільше дотичне напруження τ_{max} досягає або перевищує допустиме значення $[\tau]$, тоб то

$$\tau_{\max} \leq [\tau].$$

Максимальні дотичні напруження за об’ємного напруженого стану визначаються так

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

а допустиме дотичне напруження за умов розтягання можна знайти таким чином

$$[\tau] = \frac{[\sigma_{\text{р}}]}{2}.$$

Тоді, еквівалентним напруженням за третьою теорією є різниця алгебраїчно найбільшого і найменшого головних напружень і умова міцності записується так:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma_{\text{р}}].$$

Як засвідчила дослідна перевірка, цей критерій з достатньою точністю для інженерних потреб передбачає поведінку пластичних матеріалів в умовах складного напруженого стану, за крихкого стану матеріалу дана теорія міцності здебільшого не застосовується.

Недоліком теорії є те, що вона не враховує вплив на міцність другого головного напруження.

Гранична поверхня, що відповідає третій теорії міцності, утворюється шістьма площинами, які пересікаючись утворюють шестигранну призму, яка має вісь симетрії, рівнонахилену до координатних осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. В умовах плоского напруженого стану крива руйнування має вигляд шестикутника, осі симетрії якого проходять через початок координат і нахилені під кутом 45^0 до осей координат (рис. 2).

Увага! *Область використання: пластичні матеріали.*

Енергетичний критерій Губера (четверта теорія міцності)

У 1904 році видатний польський науковець, професор Львівської політехніки Максиміліан Титус Губер сформулював гіпотезу, за якою досягнення граничного стану пов'язується з питомою потенціальною енергією зміни форми, накопиченою здеформованим тілом. Цей підхід був пізніше розвинений в працях Річарда фон Мізеса (1913) і Гайнріха Генкі (1924) через що критерій часто зветься критерієм Губера-Мізеса-Генкі.

Згідно з цією теорією руйнування (або текучість) матеріалу в умовах складного напруженого стану відбувається тоді, коли питома потенціальна енергія зміни форми $u_ф$ досягає граничного значення $u_ф \le [u_ф]$.

Напишемо відповідні вирази для лівої і правої частин нерівності:

$$u_ф = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right],\ [u_ф]=\frac{1+\mu}{3E}[\sigma]^2$$

Звідси одержуємо

$$\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \le [\sigma_{\text{р}}].$$

На противагу попереднім теоріям, четверта теорія міцності використовує в якості чинника, що відповідає за руйнування матеріалу, величину, відмінну від напружень і деформацій.

Безумовною перевагою цієї теорії є те, що вона враховує вплив на граничний стан всіх трьох головних напружень. Експериментальні дослідження підтвердили, що критерій задовільно прогнозує початок пластичних деформацій для різноманітних металів та сплавів (сталей, латуней, алюмінієвих та титанових сплавів, нікелю і т.ін.).

Критерій руйнування за четвертою теорією міцності представляє собою рівняння поверхні другого порядку і зображується у просторі головних нормальних напружень рівнонахиленим до осей координат циліндром. В умовах плоского напруженого стану крива руйнування зображується еліпсом, осі симетрії якого проходять через початок координат і нахилені під кутом 45^0 до осей координат (рис. 2).

Увага! *Область використання: пластичні матеріали.*

Порівняння класичних критеріїв міцності

До повністю ізотропних матеріалів відносяться метали і сплави, технологія виготовлення яких не викликає анізотропії і асиметрії основних механічних характеристик міцності (текучості). Гранична поверхня таких матеріалів має чітко виражену симетрію. У прямокутній системі координат з осями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ гранична поверхня має рівнонахилену до осей координат вісь симетрії, через яку можна провести ряд взаємно перпендикулярних площин симетрії, що проходять через початок координат. За умов плоского напруженого стану граничний контур руйнування (текучості) має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, які нахилені до осей координат під кутом 45^0 та проходять через початок координат. На рис. 2 наведені контури руйнування для класичних теорій міцності.

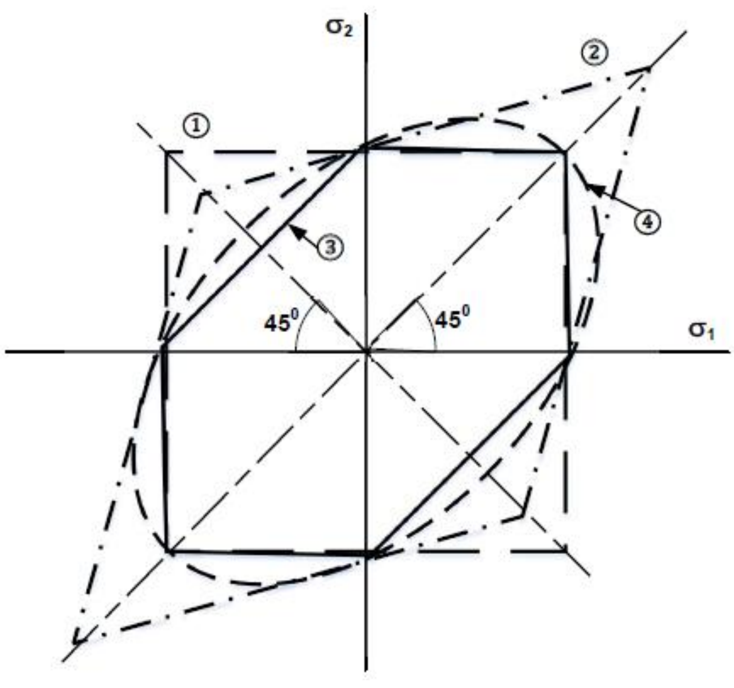


Рис. 2 Графічна інтерпретація класичних теорій міцності в умовах плоского напруженого стану (1- критерій найбільшого нормального напруження, 2 - критерій найбільшої лінійної деформації, 3 - критерій найбільшого дотичного напруження, 4 - енергетичний критерій Губера)

Як бачимо, різним критеріям міцності відповідають різні граничні поверхні руйнування (текучості). Через це питання про достовірність тієї чи іншої теорії міцності є природнім.

Класичні теорії міцності багаторазово перевірялися експериментально. У більшості випадків досліди виконували за умов плоского напруженого стану, що дозволило отримати експериментально значну кількість граничних контурів для різних матеріалів, які порівнювалися з теоретичними розрахунками. У більшості досліджень перевага віддається четвертій теорії міцності [3-7].

У розглянутих вище чотирьох теоріях міцності границя міцності (текучості) в умовах чистого зсуву у розрахункових формулах не використовується. Тому, оцінювання достовірності тої чи іншої теорії міцності можна виконати шляхом порівняння розрахункового значення з експериментальним.

В умовах чистого зсуву головні напруження визначаються наступним чином: $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$.

Тоді, відповідні еквівалентні і граничні напруження за класичними теоріями міцності будуть мати такі значення:

1) $\sigma_{\text{екв}}^{\text{I}} = max\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\} = \sigma_1 = \tau$, звідси маємо $\tau = \sigma_{\text{р}}$;

2) $\sigma_{\text{екв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \tau + \mu\tau,\ \tau = \frac{1}{1+\mu}\sigma_{\text{р}}$;

3) $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau, \tau = \frac{1}{2}\sigma_{\text{р}}$;

4) $\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3}\tau, \tau = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{\text{р}}$.

Багаточисельні експерименти на кручення свідчать, що для багатьох металів та сплавів границя міцності в умовах чистого зсуву найбільше відповідає значенню, що розраховується за четвертою теорією міцності. Дещо гірше відповідають експериментальним даним результати розрахунків за третьою теорією міцності.

В оцінці теорій міцності суттєву роль відіграють також результати досліджень за умови всебічного (гідростатичного) стискання. Дослідження засвідчили, що ізотропний матеріал може без руйнування (або утворення пластичних деформацій) витримувати значні гідростатичні стискаючі навантаження, які набагато перевищують навантаження, за яких досягається граничний стан у випадку одновісного навантажування. Цей факт було покладено в основу аналізу достовірності теорій міцності.

За умов гідростатичного стискання ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = p_c$) з першої теорії міцності маємо, що граничний стан досягається тоді, коли гідростатичний тиск дорівнює границі міцності на розтягання: $p_c = \sigma_\text{р}$. Цей висновок зовсім не корелює з результатами експериментальних досліджень.

З другої теорії міцності будемо мати, що граничний стан за умов гідростатичного стискання наступає тоді, коли

$$p_c = \frac{\sigma_p}{1 - 2\mu}.$$

Якщо прийняти коефіцієнт Пуасона $\mu = 0.25$, то $p_c = 2\sigma_\text{р}$, тобто знову теоретичний результат не відповідає дослідним даним.

Застосування третьої і четвертої теорій міцності дає підставу зробити висновок про те, що за умов гідростатичного стискання матеріал неможливо зруйнувати (або викликати появу пластичних деформацій), тобто $p_c = \infty$.

Таким чином, для інженерних розрахунків міцності елементів конструкцій з ізотропних матеріалів, що працюють в умовах складного напруженого стану, як правило, рекомендують застосовувати третю і четверту теорії міцності.

Критерії міцності і пластичності частково ізотропних матеріалів (з різними границями міцності за розтягання і стискання)

Крім повністю ізотропних матеріалів існує широкий клас ізотропних матеріалів, які мають різні характеристики міцності за умов одновісного розтягання і стискання (частково ізотропні матеріали). Асиметрія характеристик міцності приводить до того, що в умовах об'ємного напруженого стану через початок координат неможливо провести площину симетрії, перпендикулярну до осі симетрії граничної поверхні. За умов плоского напруженого стану маємо тільки одну вісь симетрії.

До цього класу матеріалів відносяться такі широко вживані матеріали, як чавуни, бетони, металокерамічні сплави, полімерні матеріали, композиційні матеріали з хаотичним розміщенням наповнювача і т. ін.

На сьогоднішній день для таких матеріалів розроблено більше сорока різних критеріїв міцності [7]. Більшість з них ґрунтується на положеннях класичних теорій міцності, які поширюються на частково ізотропні матеріали. В критерій міцності таких матеріалів входять границі міцності за одновісного розтягання та стискання і, якщо це необхідно, за умови чистого зсуву.

Більшість частково ізотропних матеріалів відноситься до крихких матеріалів. Прийнято вважати, що чим більша асиметрія границь міцності за одновісного навантажування, тим матеріал є більш крихким.

Критерій Мора (п'ята теорія міцності)

Розглянуті класичні критерії міцності формулюються за однією схемою: еквівалентні напруження порівнюються з граничним напруженням, яке визначається з випробувань на одновісне розтягання. Тобто, граничне напруження вважається однаковим для всіх видів напруженого стану. Не дивлячись на достатню ефективність такого припущення, на певному етапі вдосконалення критеріїв міцності воно було переглянуте.

Отто Мор у 1900 році запропонував критерій міцності, у якому ввів допустимі напруження, що змінюються в залежності від напруженого стану. Теорія Мора ґрунтується на припущенні, що міцність матеріалів у загальному випадку напруженого стану залежить в основному від значення і знаку найбільшого σ_1 та найменшого σ_3 головних напружень.

Відповідно до цього припущення будь-який напружений стан можна графічно представити у вигляді «кола Мора», що будується на головних напруженнях σ_1 і σ_3. Якщо при заданих напруженнях σ_1 і σ_3 порушується міцність матеріалу, то коло, що побудовано на цих напруженнях, зветься граничним. Змінюючи співвідношення між σ_1 і σ_3, отримуємо для даного матеріалу сімейство граничних кіл, для яких можна побудувати огинаючу, яка зветься граничною огинаючою (рис. 3).

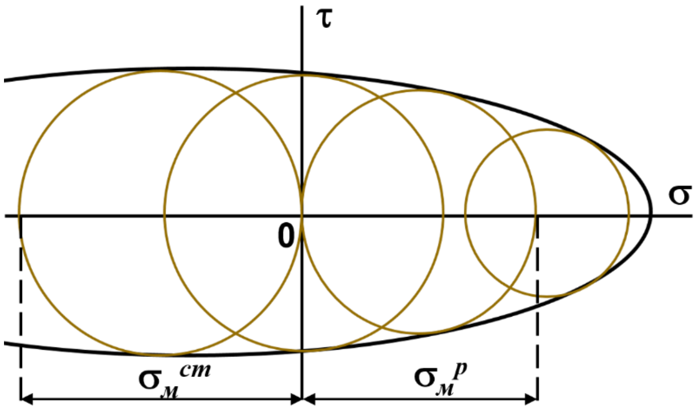


Рис. 3 Гранична огинаюча кіл Мора

Огинаюча графічно зображує залежність дотичного напруження τ у момент руйнування матеріалу від середнього нормального напруження σ, і може бути записана таким чином

$\tau = f(\sigma)$, де $\tau = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$, а $\sigma = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}$.

Досліди свідчать, що з переходом від області розтягання до області стискання опір руйнуванню збільшується, чому відповідає збільшення діаметрів граничних кіл. Точка перетину огинаючої з віссю абсцис відповідає всебічному розтяганню. За умов всебічного стискання матеріал здатен витримувати значні навантаження не руйнуючись, тому ліва частина огинаючої залишається незамкненою.

Згідно з теорією Мора руйнування в у мовах складного напруженого стану відбувається тоді, коли коло Мора, що відповідає напруженому стану у заданій характерній точці, дотикається або виходить за граничну огинаючу кіл Мора.

Достатньо точна апроксимація граничної огинаючої кіл Мора вимагає виконання великої кількості механічних випробувань з різними видами напруженого стану, що потребує спеціального обладнання і становить складну наукову задачу. Однак її можна замінити лінійною апроксимацією у вигляді прямих, дотичних до кіл Мора, побудованих для розтягання, з діаметром, рівним відповідній границі міцності $\sigma_{\text{м}}^{\text{р}}$, і для стискання - з діаметром, рівним границі міцності на стискання $\sigma_{\text{м}}^{\text{ст}}$ (рис. 4).

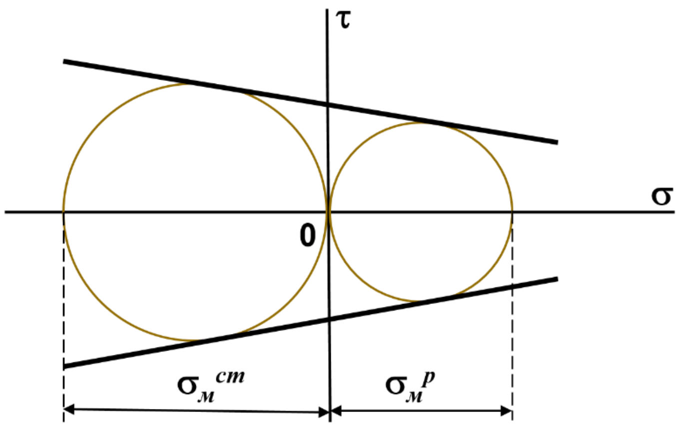


Рис. 4 Лінійна апроксимація граничної огинаючої кіл Мора

В цьому випадку гранична огинаюча кіл Мора апроксимується лінійною функцією

$$\tau = \tau^0 + \text{A} \cdot \sigma,$$

де τ^0 – граничне значення дотичних напружень при $\sigma = 0$; A – коефіцієнт, який відповідно до гіпотези Кулона зветься коефіцієнтом внутрішнього тертя.

Це рівняння можна переписати як залежність між головними напруженнями σ_1 і σ_3.

$$\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2} = \tau^0 + A \cdot \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right).$$

Для визначення констант τ^0 і А розглянемо граничні умови. За умов розтягання граничні напруження становитимуть: $\sigma_3 = 0$, а $\sigma_1 = \sigma_{\text{м}}^{\text{р}}$; за стискання, відповідно, маємо $\sigma_1 = 0$, а $\sigma_3 = -\sigma_{\text{м}}^{\text{ст}}$. Підставляємо ці значення до попереднього рівняння і отримуємо систему з двох рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\sigma_{\text{м}}^{\text{р}}}{2} = \tau^0 + A \cdot \left(\dfrac{\sigma_{\text{м}}^{\text{р}}}{2}\right) \\ \dfrac{\sigma_{\text{м}}^{\text{ст}}}{2} = \tau^0 - A \cdot \left(\dfrac{\sigma_{\text{м}}^{\text{ст}}}{2}\right). \end{cases}$$

Розв'язавши систему відносно невідомих констант, визначаємо їх значення:

$$\text{А} = -\frac{\left(\sigma_{\text{м}}^{\text{ст}} - \sigma_{\text{м}}^{\text{р}}\right)}{\left(\sigma_{\text{м}}^{\text{ст}} + \sigma_{\text{м}}^{\text{р}}\right)}; \;\; \tau^0 = \frac{\sigma_{\text{м}}^{\text{р}} \cdot \sigma_{\text{м}}^{\text{ст}}}{\sigma_{\text{м}}^{\text{ст}} + \sigma_{\text{м}}^{\text{р}}}.$$

Після нескладних перетворень отримаємо:

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{м}}^{\text{р}} - \frac{\sigma_{\text{м}}^{\text{р}}}{\sigma_{\text{м}}^{\text{ст}}} \cdot \sigma_3.$$

Якщо границі міцності при розтяганні і стисканні ($\sigma_{\text{м}}^{\text{р}}$, $\sigma_{\text{м}}^{\text{ст}}$) замінити відповідними допустимими напруженнями ($[\sigma_{\text{р}}]$, $[\sigma_{\text{c}}]$), то еквівалентне напруження і критерій міцності за спрощенною теорією Мора (іноді її ще звуть п'ятою теорією міцності) мають такий вигляд:

$$\sigma_{\text{екв}}^{V} = \sigma_1 - \chi \cdot \sigma_3 \leq [\sigma_{\text{р}}], \text{де } \chi = \frac{[\sigma_{\text{р}}]}{[\sigma_{\text{c}}]}.$$

Як бачимо, при χ =1 (пластичні матеріали) критерій збігається з критерієм найбільших дотичних напружень.

Теорія міцності Мора дозволяє оцінити опір руйнуванню матеріалів, які мають різні механічні характеристики за розтягування та стискання.

Критерій Мора підходить як для перевірки міцності крихких матеріалів (чавун, бетон, цегла), так і для перевірки на міцність пластичних матеріалів (низьковуглецева сталь).

Серед недоліків критерію слід відзначити, по-перше, що він не враховує вплив другого головного напруження σ_2, по-друге, апроксимація граничної огинаючої кіл Мора з достатньою точністю потребує виконання багатьох дослідів в умовах складного напруженого стану, її заміна лінійною апроксимацією є зручною але грубою оцінкою дійсного граничного стану.

Увага! *Переважна область використання - крихкі матеріали.*

Критерій Писаренка-Лебедєва

Систематизація результатів механічних випробувань різних матеріалів в умовах складного напруженого стану свідчить, що велика кількість конструкційних матеріалів займає проміжне положення між пластичними, граничний стан яких задовільно описується третьою і четвертою теоріями міцності, і крихкими матеріалами, для оцінки яких можна застосувати першу теорію міцності. Тому подальші дослідження у теорії граничних станів були направлені на розробку більш надійних критеріїв міцності для квазікрихких матеріалів. Одним з таких критеріїв міцності є критерій Писаренка-Лебедєва.

Г.С. Писаренко та А.О. Лебедєв, вважаючи, що настання граничного стану зумовлено здатністю матеріалу чинити опір, як дотичним, так і нормальним напруженням, запропонували критерій міцності у вигляді інваріантних по відношенню до напруженого стану функцій дотичних напружень та максимального нормального напруження.

$$\tau_{\text{окт}} + m_1 \cdot \sigma_1 \leq m_2,$$

де $\tau_{\text{окт}}$ – октаедричне дотичне напруження – результуюча дотичного напруження на октаедричній площадці (рівнонахилена до головних осей); m_1 і m_2 – константи матеріалу, які можна записати через допустимі (граничні) напруження за одновісного розтягання $[\sigma_{\text{р}}]$ і стискання $[\sigma_{\text{с}}]$.

Октаедричне дотичне напруження записується через головні напруження таким чином

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Еквівалентне напруження та критерій міцності мають такий вигляд

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{ПЛ}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\chi\tau_{\text{окт}} + (1-\chi)\sigma_1 \le [\sigma_{\text{р}}],$$

де $\chi = \frac{[\sigma_{\text{р}}]}{[\sigma_{\text{с}}]}$ – параметр, що характеризує ступінь впливу на мікроруйнування деформації зсуву.

Еквівалентне напруження за критерієм Писаренка-Лебедєва ще записують через інтенсивність напружень σ_{i}

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{ПЛ}} = \chi\sigma_{\text{i}} + (1-\chi)\sigma_1 \le [\sigma_{\text{р}}],$$

де $\sigma_{\text{i}} = (3/\sqrt{2})\tau_{\text{окт}}$.

Для матеріалів, що знаходяться у пластичному стані, коли $[\sigma_{\text{р}}] = [\sigma_{\text{с}}]$ (χ=1), критерій Писаренка-Лебедєва збігається з енергетичним критерієм Губера.

Для ідеально крихких матеріалів $[\sigma_{\text{р}}] \ll [\sigma_{\text{с}}]$ (χ=0), тобто критерій збігається з критерієм максимальних нормальних напружень.

Аналіз результатів випробувань багатьох конструкційних матеріалів, що не мають суттєвих порушень структури, підтвердив високу достовірність критерію Писаренка-Лебедєва.

Увага. *Область використання – квазікрихкі матеріали.*

ІІ. ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1.

Знайти допустиме значення σ_1 для обємного нпруженого стану за класичними теоріями міцності, якщо $\sigma_2 = \frac{1}{3}\sigma_1$, $\sigma_3 = -\frac{1}{3}\sigma_1$.

Розв'язання

Підставляємо до умов міцності значення головних напружень:

1) $\sigma_{\text{екв}}^{\text{I}} = max\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\} = \sigma_1$, звідси маємо $[\sigma_1] = [\sigma_{\text{р}}]$;

2) $\sigma_{\text{екв}}^{\text{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_1 + \mu\left(\frac{1}{3}\sigma_1 - \frac{1}{3}\sigma_1\right)$, тоді $[\sigma_1] = [\sigma_{\text{р}}]$;

3) $\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_1 + \frac{1}{3}\sigma_1$, звідси $[\sigma_1] = \frac{3}{4}[\sigma_{\text{р}}]$;

4) $\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{2}{3}\sigma_1\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\sigma_1\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\sigma_1\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma_1 = [\sigma_{\text{р}}].$$

Звідси маємо $[\sigma_1] = \frac{\sqrt{3}}{2}[\sigma_{\text{р}}]$.

Приклад 2.

Порівняти чотири класичні теорії міцності через визначення границі міцності (текучості) у випадку чистого зсуву. Розрахунки виконати для зразка, виготовленого зі сталі 30. Механічні характеристики матеріалу: границя міцності $\sigma_{\text{м}} = 500$ МПа,, границя текучості $\sigma_{\text{т}} = 300$ МПа, границя текучості при крученні $\tau_{\text{т}} = 170$ МПа, відносне подовження $\delta = 21\,\%$, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,25$. Порівняти одержані результати, визначити найбільш достовірну теорію.

Розв'язання

В умовах чистого зсуву головні напруження мають наступні значення: $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau,\ \sigma_2 = 0$.

Обчислимо відповідні еквівалентні і граничні напруження за класичними теоріями міцності:

1) $\sigma_{\text{екв}}^{\mathrm{I}} = max\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\} = \ \sigma_1 = \tau$, звідси маємо $\tau = [\sigma_{\text{р}}]$;

2) $\sigma_{\text{екв}}^{\mathrm{II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \tau + \mu\tau,\ \ \tau = \frac{1}{1+\mu}[\sigma_{\text{р}}]$;

3) $\sigma_{\text{екв}}^{\mathrm{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\tau, \tau = \frac{1}{2}[\sigma_{\text{р}}]$;

4) $\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3}\tau, \tau = \frac{1}{\sqrt{3}}[\sigma_{\text{р}}]$.

Як бачимо, для умов чистого зсуву розглянуті теорії дають різні значення граничного напруження. Так як сталь 30 є пластичним матеріалом ($\delta > 5\%$), то граничним напруженням буде границя текучості. Порівняємо розрахункові і дослідні результати:

1) перша теорія міцності: $\tau_1 = \sigma_{\text{т}}$=300 МПа;

2) друга теорія міцності: $\tau_2 = \frac{1}{1+\mu}\sigma_{\text{т}}$ = 240 МПа;

3) третя теорія міцності: $\tau_3 = \frac{1}{2}\sigma_{\text{т}}$=150 МПа;

4) четверта теорія міцності: $\tau_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{\text{т}}$ ≈173 МПа;

5) експериментальне значення: $\tau_{\text{т}} = 170$ МПа.

Таким чином, розрахунки засвідчили, що найкращу оцінку дає четверта теорія міцності.

Приклад 3.

Сформулювати теорію міцності, згідно з якою за критерій граничного стану обирають величину першого інваріанта тензора деформації $\mathrm{I}_\varepsilon^1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Еквівалентне напруження записати через головні напруження. Підтвердити або спростувати цю теорію, застосувавши її до випадку чистого зсуву.

Розв'язання

Відповідно до запропонованої гіпотези руйнування (або текучість) матеріалу в умовах складного напруженого стану відбувається тоді, коли перший інваріант тензора деформації I_ε^1 досягає граничного значення, тобто

$$\mathrm{I}_\varepsilon^1 \leq [\mathrm{I}_\varepsilon^1].$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, напишемо перший інваріант тензора деформації I_ε^1 через головні напруження, а саме

$$I_\varepsilon^1 = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] + \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] + \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)],$$

$$I_\varepsilon^1 = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Допустиме значення $[\mathrm{I}_\varepsilon^1]$ визначаємо для випадку одновісного розтягання $(\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0)$, а саме

$$[\mathrm{I}_\varepsilon^1] = \frac{1-2\mu}{E} \cdot [\sigma_\mathrm{p}].$$

Звідси відповідне еквівалентне напруження і умова міцності будуть мати такий вигляд

$$\sigma_{\text{екв}} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \leq [\sigma_\mathrm{p}].$$

Застосуємо отриманий критерій до випадку чистого зсуву ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau, \sigma_2 = 0$)

$$\sigma_{\text{екв}} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \tau - \tau = 0.$$

Як бачимо, одержане еквівалентне напруження в умовах чистого зсуву за будь-якого рівня навантаження дорівнює нулю. Таким чином, робимо висновок щодо хибності висунутої гіпотези.

Приклад 4.

У небезпечній точці деталі діють напруження: $\sigma_1 = 2\sigma, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -\sigma$. Обчислити допустимі значення цих напружень за критеріями Мора і Писаренка-Лебедєва, якщо допустимі напруження на розтягання $[\sigma_{\text{р}}]$ = 120 МПа, на стискання $[\sigma_{\text{с}}]$ = 300 МПа. Як зміниться допустиме навантаження на елемент, якщо його виготовити з матеріалу, що має однакові допустимі напруження на розтягання і стискання $[\sigma_{\text{р}}]$ =$[\sigma_{\text{с}}]$ =160 МПа?

Розв'язання

1) Зробимо необхідні обчислення за умови, що $\chi = \frac{[\sigma_{\text{р}}]}{[\sigma_{\text{с}}]} = \frac{120}{300} = 0{,}4.$

Умова міцності за критерієм Мора записується так

$$\sigma_{\text{екв}}^{V} = \sigma_1 - \chi \cdot \sigma_3 = 2\sigma - \chi(-\sigma) \le [\sigma_{\text{р}}].$$

Звідси отримуємо $[\sigma] = \frac{[\sigma_{\text{р}}]}{2+\chi} = \frac{120}{2{,}4} = 50$ МПа.

Отже, за критерієм Мора $[\sigma_1] = 100$ МПа, $[\sigma_3] = -50$ МПа.

За критерієм Писаренка-Лебедєва маємо

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{ПЛ}} = \chi\sigma_{\text{i}} + (1 - \chi)\sigma_1 \le [\sigma_{\text{р}}].$$

Обчислимо значення інтенсивності напруження

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(2\sigma)^2+\sigma^2+(-3\sigma)^2}=\sqrt{7}\sigma.$$

Тоді $\sigma_{\text{екв}}^{\text{ПЛ}} = \chi\sqrt{7}\sigma + (1-\chi)2\sigma = \left(0{,}4\cdot\sqrt{7}+0{,}6\cdot 2\right)\sigma = 2{,}258\cdot\sigma = \left[\sigma_{\text{р}}\right]$, звідси визначаємо $\sigma = \frac{[\sigma_{\text{р}}]}{2{,}258} = \frac{120}{2{,}258} \approx$ 53 МПа.

Отже, за критерієм Писаренка-Лебедєва $[\sigma_1] \approx 106$ МПа, $[\sigma_3] \approx -53$ МПа.

2) Обчислимо допустимі значення напружень за умови, що $\chi = 1$.

Критерій Мора при $\chi = 1$ зводиться до критерію максимальних дотичних напружень

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3 = 2\sigma - (-\sigma) \le \left[\sigma_{\text{р}}\right].$$

Звідси отримуємо $[\sigma] = \frac{[\sigma_{\text{р}}]}{3} = \frac{160}{3} \approx$ 53 МПа.

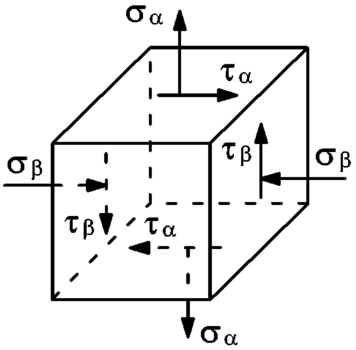
Отже, $[\sigma_1] \approx 106$ МПа, $[\sigma_3] \approx -53$ МПа.

Критерій Писаренка-Лебедєва при $\chi = 1$ зводиться до енергетичного критерію Губера

$$\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sigma_{\text{i}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \le \left[\sigma_{\text{р}}\right].$$

Як і в попередньому випадку $\sigma_i = \sqrt{7}\sigma$. Тоді $\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sqrt{7}\sigma = 2{,}646\cdot\sigma = \left[\sigma_{\text{р}}\right]$, звідси визначаємо $\sigma = \frac{[\sigma_{\text{р}}]}{2{,}646} = \frac{160}{2{,}646} \approx$ 60 МПа.

Отже, $[\sigma_1] \approx 120$ МПа, $[\sigma_3] \approx -60$ МПа.



Приклад 5.

Для небезпечної точки чавунної деталі:

$\sigma_\alpha = 5МПа; \sigma_\beta = -25МПа; \tau_\alpha = -\tau_\beta = 26МПа$

$\lfloor \sigma_p \rfloor = 35МПа; [\sigma_c] = 120МПа$.

Визначити запаси міцності по відношенню до допустимого напруження (недовантаження).

Розв'язання

Визначимо головні напруження:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right] = \frac{1}{2}\left[5 - 25 + \sqrt{(5+25)^2 + 4 \cdot 26^2}\right] = 20МПа\ ;$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}\left[5 - 25 - \sqrt{(5+25)^2 + 4 \cdot 26^2}\right] = -40МПа\ ;$$

$$\sigma_2 = 0\ .$$

Розглянемо критерії міцності, які застосовують у розрахунках граничного стану крихких матеріалів.

<u>Перша теорія міцності.</u>

$$\begin{cases} \sigma_1 \le [\sigma_p] \\ |\sigma_3| \le [\sigma_c] \end{cases};\quad \begin{matrix} 20 < \lfloor \sigma_p \rfloor = 35МПа \\ 40МПа < [\sigma_c] = 120МПа \end{matrix};$$

Запас міцності $n = \frac{\lfloor \sigma_p \rfloor}{\sigma_1} = \frac{35}{20} = 1{,}75$.

<u>Друга теорія міцності.</u>

$$\sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma_p]; \mu = 0{,}25;$$

$$\sigma_{екв}^{II} = 20 - 0{,}25(0 - 40) = 30МПа \le \lfloor \sigma_p \rfloor = 35МПа\ ;$$

$$n = \frac{\lfloor \sigma_p \rfloor}{\sigma_{екв}^{II}} = \frac{35}{30} = 1{,}17\ .$$

<u>Теорія міцності Мора.</u>

$$\sigma_{екв}^{V} = \sigma_1 - \frac{\lfloor \sigma_p \rfloor}{[\sigma_c]}\sigma_3 \le \lfloor \sigma_p \rfloor; \qquad \sigma_{екв}^{V} = 20 - \frac{35}{120}(-40) = 31{,}7МПа \le 35МПа\ ;$$

$$n = \frac{\lfloor \sigma_p \rfloor}{\sigma_{екв}^{V}} = \frac{35}{31{,}7} = 1{,}1.$$

Теорія міцності Писаренка-Лебедєва.

$$\sigma_{екв}^{ПЛ} = \chi\sigma_i + (1-\chi)\sigma_1 \le [\sigma_p];$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} = \sqrt{20^2 + 40^2 - 20 \cdot 40} = 52{,}9 МПа;$$

$$\chi = \frac{\lfloor\sigma_p\rfloor}{[\sigma_C]} = \frac{35}{120} = 0{,}29;$$

$$\sigma_{екв}^{ПЛ} = 0{,}29 \cdot 52{,}9 + (1-0{,}29)20 = 29{,}5 МПа < 35 МПа;$$

$$n = \frac{\lfloor\sigma_p\rfloor}{\sigma_{екв}^{ПЛ}} = \frac{35}{29{,}5} = 1{,}19.$$

III. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

1. У небезпечній точці деталі діють напруження: $\sigma_1 = 20$ МПа, $\sigma_2 = -40$МПа, $\sigma_3 = -80$ МПа. Обчислити еквівалентні напруження за класичними теоріями міцності та теорією Мора, якщо відношення допустимих напружень на розтягання і стискання становить $[\sigma_\text{р}]/[\sigma_\text{с}] = 0{,}5$, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0{,}3$.

   Відповідь: $\sigma_\text{екв}^\text{I} = 20$МПа, $\sigma_\text{екв}^\text{II} = 56$МПа, $\sigma_\text{екв}^\text{III} = 100$ МПа, $\sigma_\text{екв}^{IV} = 87{,}2$ МПа, $\sigma_\text{екв}^{V} = 60$ МПа.

2. Визначити за критерієм найбільших дотичних напружень (III теорія міцності), який з трьох напружених станів: 1) $\sigma_1 = 90$ МПа, $\sigma_2 = 40$МПа, $\sigma_3 = 30$ МПа; 2) $\sigma_1 = 40$ МПа, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -20$ МПа; 3) $\sigma_1 = 65$ МПа, $\sigma_2 = 50$МПа, $\sigma_3 = 0$, є найбільш небезпечним. Матеріал на розтяг і стиск працює однаково.

   Відповідь: найбільш небезпечним є напружений стан 3.

3. Визначити запас міцності болта за четвертою теорією міцності з різьбою М24×1.5, якщо в результаті затяжки в ньому виникло зусилля $F_0 = 45$ кН, а момент кручення в різьбі складає $T_\text{р} = 200$ Н·м. Матеріал болта – вуглецева сталь (границя текучості $\sigma_\text{т} = 650$ МПа).

   Відповідь: $n_\text{т} = 2$.

4. У небезпечній точці деталі діють напруження: σ_1, $\sigma_2 = 0{,}3\sigma_1$, $\sigma_3 = -2\sigma_1$. Визначити допустиме значення напруження $[\sigma_1]$ за першою і другою теоріями міцності, теоріями Мора і Писаренка-Лебедєва, якщо допустимі напруження на розтягання $[\sigma_\text{р}]$ = 70 МПа, на стискання $[\sigma_\text{с}]$ = 120 МПа, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0{,}3$.

   Відповідь: *перша теорія міцності* – $[\sigma_1] = 70$ МПа,
   друга теорія міцності – $[\sigma_1] = 41{,}4$ МПа,
   теорія Мора – $[\sigma_1] = 32{,}3$ МПа,
   теорія Писаренка-Лебедєва – $[\sigma_1] = 35$ МПа.

5. В деякій точці тіла має місце плоский напружений стан. На двох взаємно перпендикулярних площадках виявлені нормальні та дотичні напруження: $\sigma_x = 100$ МПа, $\sigma_\text{y} = -60$МПа, $\tau_\text{xy} = 100$ МПа.

   Перевірити матеріал на міцність в даній точці за другою та четвертою теоріями міцності. Допустиме напруження матеріалу $[\sigma_\text{р}] = 160$ МПа, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0{,}33$.

   Відповідь: $\sigma_\text{екв}^\text{II} = 184{,}1$МПа $> [\sigma_\text{р}] = 160$ МПа *(умова не виконується)*, $\sigma_\text{екв}^{IV} = 222{,}7$ МПа $> [\sigma_\text{р}] = 160$ МПа *(умова міцності не виконується)*.

6. Перевірити міцність деталі, якщо в небезпечній точці діють такі напруження: $\sigma_x = 132$ МПа, $\tau_{xy} = 88$ МПа. Деталь виготовлена із сталі. Допустиме напруження матеріалу $[\sigma_\text{р}] = 210$ МПа.

   Відповідь: $\sigma_\text{екв}^\text{III} = 220$ МПа $> [\sigma_\text{р}] = 210$ МПа *(умова не виконується, проте, перенапруження складає лише 4,8%, що дозволяє прийняти такий рівень навантаження допустимим)*, $\sigma_\text{екв}^{\text{I}V} = 202$ МПа $< [\sigma_\text{р}] = 220$ МПа *(умова міцності виконується)*.

7. Квадратна пластинка розтягується силами, які викликають напруження σ_x, що дорівнюють допустимим напруженням для даного матеріалу $[\sigma]$. Визначити дотичні напруження τ, які необхідно додатково прикласти,

щоб коефіцієнт запасу зменшився у два рази. В розрахунках застосувати критерій найбільших дотичних напружень (III теорія міцності).

Відповідь: $\tau = \frac{\sqrt{3}}{2}[\sigma]$.

8. На кінцях балки круглого поперечного перерізу з діаметром $d = 2$ см діють згинальні M і крутні $M_к = 2M$ моменти. Визначити допустимі значення згинального і крутного моментів за третьою та четвертою теоріями міцності, якщо $[\sigma_р] = 160$ МПа.

Відповідь: *III теорія міцності* – $[M] = 56{,}17$ Нм, $[M_к] = 112{,}34$ Нм;

IV теорія міцності – $[M] = 62{,}8$ Нм, $[M_к] = 125{,}6$ Нм.

9. Перевірити міцність деталі, якщо в небезпечній точці діють головні напруження: $\sigma_1 = 30$ МПа, $\sigma_2 = -100$МПа, $\sigma_3 = -150$ МПа. Деталь виготовлено з чавуну з допустимими напруженнями на розтягання $[\sigma_р]$ = 90 МПа та стискання $[\sigma_с]$ = 300 МПа. Коефіцієнт Пуассона $\mu = 0{,}25$.

Відповідь: перша теорія міцності – $\sigma_{екв}^{I} = 30$ МПа $< [\sigma_р] = 90$ МПа, *друга теорія міцності* – $\sigma_{екв}^{II} = 92{,}5$ МПа $> [\sigma_р] = 90$ МПа *(умова не виконується, перевантаження менше 3%), теорія Мора* – $\sigma_{екв}^{V} = 75$ МПа $< [\sigma_р] = 90$ МПа, *теорія Писаренка-Лебедєва* – $\sigma_{екв}^{PL} = 69{,}3$ МПа $< [\sigma_р] = 90$ МПа.

10. Визначити допустиме навантаження для ламаного стержня, який зображено на рис. 5. Матеріал стержня – ковкий чавун з границями міцності: при розтягуванні $\sigma_м^р = 150$ МПа, при стисканні $\sigma_м^с = 330$ МПа. Поперечний переріз стержня має форму квадрата зі стороною $a = 3{,}5$ см, $l = 50$ см, коефіцієнт запасу $n = 3$. Розрахунки провести за критеріями Мора (V теорія міцності) та Писаренка-Лебедєва.

Відповідь: за критерієм Мора $[F] = 3{,}91$ кН, за критерієм Писаренка-Лебедєва $[F] = 4{,}86$ кН.

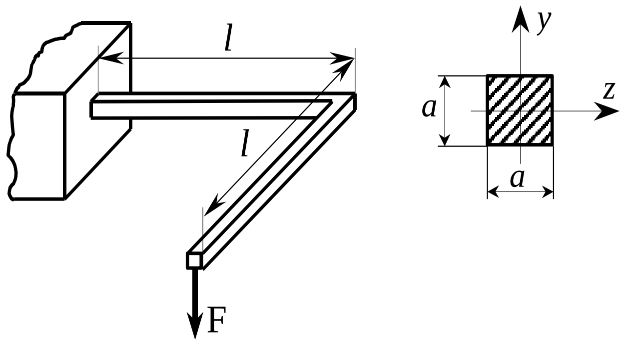


Рис. 5

IV. ПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ

1. Що розуміють під граничним станом матеріалу? Чим характеризується досягнення граничного стану у пластичних та крихких матеріалів?
2. Який напружений стан називають складним?
3. Яке напруження називають еквівалентним?
4. Запишіть умову міцності для умов складного напруженого стану у загальному випадку.
5. Дати визначення граничної поверхні руйнування (текучості).
6. Що розуміють під теорією і критерієм міцності?
7. У чому сутність першої теорії міцності? Які недоліки має ця теорія?
8. У чому сутність другої теорії міцності? Які недоліки має ця теорія?
9. Які класичні критерії міцності використовують в розрахунках для крихких матеріалів?
10. Запишіть вираз еквівалентного напруження за критерієм найбільших дотичних напружень. Які недоліки має цей критерій?
11. У чому сутність енергетичного критерію Губера? Записати формулу для визначення еквівалентного напруження.
12. Які з класичних критеріїв називають критеріями пластичності? У чому полягає умова досягнення граничного стану для цих критеріїв?
13. Які матеріали називають частково ізотропними?

14. У чому сутність критерію Мора? Запишіть умову міцності за спрощеною теорією Мора. Вкажіть області застосування критерію.
15. У чому сутність критерію Писаренка-Лебедєва? До яких критеріїв зводиться критерій Писаренка-Лебедєва у випадках ідеально пластичного і крихкого матеріалів? Вкажіть області застосування критерію.

Перелік рекомендованої літератури

1. Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. - К.: Вища шк., 1993. - 655 с.
2. Збірник задач з опору матеріалів: Навч. посіб. / М.І. Бобир, А.Є. Бабенко, О.О. Боронко та ін.; За ред. М.І. Бобиря. – К.: Вища шк., 2008. – 399 с.: іл.
3. Гольденблат И.И., Копнов В.А. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. – М.: Машиностроение, 1968. – 192 с.
4. Писаренко Г.С., Лебедев А.А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – К.: Наук. Думка, 1976. – 461 с.
5. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии: Под общей редакцией академика НАН Украины А.А.Лебедева – К.: Издательский Дом «Ин Юре», 2003. – 540 с.
6. Механіка матеріалів для інженерів: Навч. посіб. / А.О. Лебедєв, М.І. Бобир, В.П. Ламашевський. – К.: НТУУ «КПІ», 2006. – 288 с.
7. Яценко В.Ф. Прочность композиционных материалов: – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. – 191 с.
8. Дарков А.В., Шапиро Г.С. Сопротивление материалов: Учеб. Для тех вузов. – М.: Высш. шк., 1989. – 624 с.
9. Сопротивление материалов: Учеб. / В.Н. Заяц, М.К. Балыкин, И.А. Голубев; Под общ.ред. В.Н. Зайца. – Мн.: Высш. шк., 1998. – 367 с.